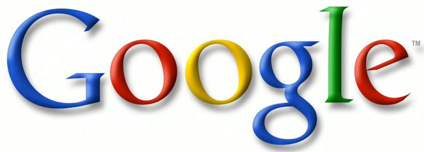


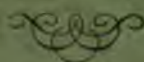
IL

POLIGONO FUNICOLARE

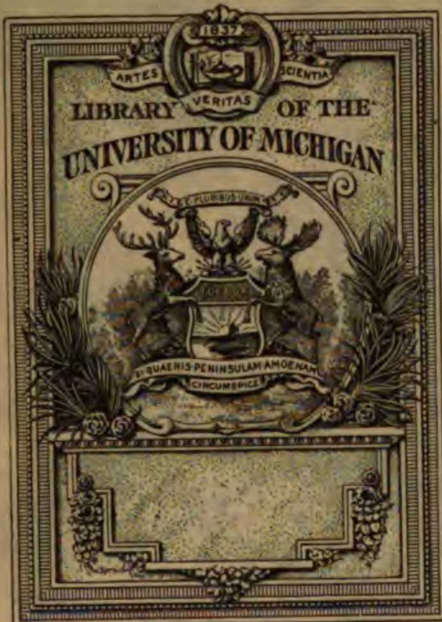
IN CINEMATICA

NOTA

dell'Ingegnere **ELIA OVAZZA**
Assistente nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri
in Torino



TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1890


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

IL

POLIGONO FUNICOLARE

IN CINEMATICA

NOTA

dell'Ingegnere ELIA OVAZZA

Assistente nella R Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri

in Torino



TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1890

Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. XXV.
Adunanza del 9 Marzo 1890.

Torino, Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C
4075 (100) 11-IV-90.

1. È nota la stretta analogia che corre fra la teoria cinematica della composizione dei movimenti e quella statica della composizione delle forze.

Se rappresentasi ciascuna rotazione componente il moto elementare d'un sistema rigido con un segmento s del corrispondente asse di rotazione, proporzionale alla velocità angolare e diretto per tal verso che una persona, distesa su di esso coi piedi alla sua origine ed il capo all'estremo, veda avvenire la rotazione per un determinato verso, e, considerati questi segmenti s come individuanti altrettante forze sollecitanti un sistema materiale rigido, si determina qual si voglia sistema di forze equivalente a quello definito dai segmenti s; se in seguito i segmenti s_1 individuanti le forze di quest'altro sistema s'interpretano come rappresentazioni d'altrettante rotazioni elementari, il nuovo sistema di rotazioni che così si ottiene equivale al sistema di quelle definite dai segmenti s.

Segue che tutti i metodi che si adoperano per comporre le forze sono senz'altro applicabili alla composizione dei moti elementari (che sempre si possono ridurre a rotazioni infinitesime); di quì la principal ragione per cui, con vantaggio in omogeneità di trattazione, in alcuni corsi di meccanica razionale alla teoria della composizione dei movimenti ed a quella della composizione delle forze si fa precedere la teoria geometrica dei segmenti, la quale appunto in quelle trasformasi quando le grandezze astratte *segmenti* si considerano successivamente come individuanti *rotazioni infinitesime* oppure *forze*.

2. Avendosi a comporre più forze parallele, p, non compiane, è noto che può operarsi come segue: assunti a punti d'applicazione delle forze (fig. 1ª) i punti d'incontro P delle loro linee d'azione con un piano π, si ribaltano le forze p, conservandole

* *E. Ovazza.*

parallele, attorno ai rispettivi punti di applicazione sul piano π in una direzione arbitraria l; si collegano le forze p_l, che risultano dal ribaltamento, con un poligono funicolare: la retta r_l condotta in direzione l pel punto comune ai lati estremi di questo poligono passa pel punto O d'incontro col piano π della risultante delle forze p. Fatto il ribaltamento in un'altra direzione m sul piano π, si ottiene un'altra retta r_m su cui deve giacere il punto O, che resta così determinato. Applicata in O nella direzione delle forze p una forza r d'intensità eguale alla somma algebrica Σp delle intensità delle componenti, r è la risultante cercata.

La stessa costruzione può applicarsi *per analogia* alla composizione di più rotazioni elementari attorno ad assi paralleli. In questa nota ci proponiamo di attribuire a tale costruzione significato puramente *cinematico*, sicchè per spiegarla non occorra risalire a teoremi della statica con evidente giro vizioso, chè dal concetto di movimento si risale a quello astratto di forza, non viceversa.

3. Se il moto d'un sistema rigido è risultante di più rotazioni attorno ad assi aventi tutti egual direzione p, esso avviene parallelamente ai piani la cui giacitura è normale alla direzione p, ed è quindi perfettamente determinato quando lo sia il moto d'una sezione fatta nel sistema materiale da un piano π avente tale giacitura, moto che avviene sul piano π medesimo. Perciò noi ci limiteremo a considerare per sistema materiale invariabile una figura piana mobile in un piano normale agli assi delle rotazioni elementari componende.

4. Un sistema piano invariabile α muovasi nel proprio piano π, considerato fisso, con moto elementare rotatorio attorno al punto $(\pi\alpha)$, centro d'istantanea rotazione, ossia attorno all'asse normale al piano π condotto pel punto $(\pi\alpha)$; e dei singoli punti A del sistema α si proiettino ortogonalmente le velocità su di una direzione l giacente nel piano π; le proiezioni che così si ottengono si diranno in seguito *velocità dei punti* A *in direzione l. Per tutti i punti del sistema mobile, che giacciono sopra una stessa retta di direzione l tali velocità in direzione l sono eguali* (*),

(*) Questa relazione può anche dimostrarsi come segue: Sia D il piede della normale abbassata su una tal retta l dal centro $(\pi\alpha)$ (fig. 2), DD′ la velocità effettiva del punto D (diretta secondo l), AA′ la velocità effettiva di un

essendo tale retta invariabile al pari del sistema cui essa appartiene; per la qual cosa si conoscerà il valore della velocità secondo l di un punto qualunque del sistema α quando si conoscano i valori di tali velocità per tutti i punti d'una retta non parallela ad l, p. es. di una normale λ ad l. Condotta tal retta λ pel centro $(\pi\alpha)$ d'istantanea rotazione, le velocità effettive dei suoi punti hanno direzione l e quindi coincidono con le velocità dei medesimi punti in direzione l. Siccome per altro tali velocità effettive sono proporzionali alle distanze dei punti corrispondenti dal centro $(\pi\alpha)$, condotte pei punti A della retta λ segmenti AA' eguali alle velocità di tali punti, il luogo degli estremi A' è *una retta* λ' incontrante la retta λ nel punto $(\pi\alpha)$.

Lo spazio angolare compreso fra le due rette λ e λ' prende il nome di *diagramma delle simultanee velocità in direzione* l pei punti del sistema per rispetto al piano π. Noto questo diagramma infatti, la velocità di un punto qualunque B del sistema α, valutata in direzione l, è data dal segmento B_1B' intercetto dalle rette λ e λ' sulla retta condotta per B in direzione l. Ed anzi questo diagramma definisce in grandezza, direzione e verso la velocità effettiva di ciascun punto B del sistema: la direzione è quella Bb della normale per B alla congiungente il punto B col centro $(\pi\alpha)$, la grandezza ed il verso sono quelli del segmento B_1B_2 che si determina conducendo a Bb la parallela BB_2 e da B' la parallela $B'B_2$ a λ (*).

---

altro punto A qualunque di l, ed AA_1 la proiezione ortogonale di AA' su l. Si ha per nota proprietà del moto rotatorio:

$$\frac{\overline{DD'}}{\overline{(\pi\alpha)D}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{(\pi\alpha)A}} (= \omega),$$

essendo ω la velocità angolare della rotazione. Ma dai triangoli $(\pi\alpha)DA$ ed AA_1A' simili si ha:

$$\frac{\overline{(\pi\alpha)D}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{(\pi\alpha)A}}{\overline{AA'}}.$$

Quindi $AA_1 = DD' =$ costante qualunque sia il punto A scelto sulla retta l.

Cfr. anche W. SCHELL, *Theorie der Bevegung und der Kräfte.* Leipzig, 1879, vol. 1, pag. 287. — BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik*, parte 1ª. Leipzig, 1887.

(*) Cfr. BURMESTER, l. c. — LAND, *Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger — Zeitschrift der österr. Architekten- und Ingenieur-Vereins*, 1888.

5. Condotta in direzione l (supposta verticale per semplicità di esposizione) una retta a distanza 1 dal punto $(\pi\alpha)$, il segmento $\omega_\pi\omega_\alpha$ intercetto su di essa dalle rette λ e λ' è la velocità angolare pel moto rotatorio considerato (velocità dei punti a distanza 1 dal centro di rotazione). Se consideransi positive le rotazioni che avvengono nel senso delle lancette dell'orologio, ed il segmento $\omega_\pi\omega_\alpha$ si conviene di misurarlo sempre a destra del centro $(\pi\alpha)$ con origine ω_α sulla retta λ, tale segmento è diretto al di sopra od al di sotto della retta λ secondochè la rotazione è negativa ovvero positiva.

6. Il diagramma $\lambda\lambda'$ non cessa di fornire con le sue ordinate lette in direzione l i valori delle velocità dei punti del sistema α valutate in direzione l quando lo si faccia scorrere rigidamente nella direzione l medesima, sicchè il vertice $(\lambda\lambda')$ trovisi sempre sulla parallela ad l pel punto $(\pi\alpha)$; chè anzi esso può, senza perdere tale sua proprietà, deformarsi variando le direzioni delle rette λ e λ' purchè il diagramma $\lambda\lambda'$ nella sua primitiva posizione e quello deformato intercettino su ciascuna di due rette qualunque di direzione l due segmenti eguali in grandezza e verso (*). Segue che il diagramma $\lambda\lambda'$, quando assumasi λ' per fondamentale, è pur anco il diagramma delle simultanee velocità in direzione l pei punti del sistema piano π se questo rota attorno al punto $(\pi\alpha)$, restando fisso il sistema piano α.

7. Si considerino ora più sistemi piani rigidi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i, \ldots \alpha_n$, mobili nel piano comune π; si disegni per ciascuno di essi il diagramma, relativo ad uno stesso istante, delle velocità simultanee in direzione l, e trasportinsi i diagrammi così risultanti, senza deformarli, in direzione l finchè abbiano una comune fondamentale λ_π. Otterremo un diagramma complesso costituito da tante rette $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_i, \ldots \lambda'_n$ quanti sono i sistemi mobili, diagramma che possiamo indicare col nome di *diagramma delle velocità simultanee in direzione l pel moto elementare* considerato sul piano π *del sistema variabile* costituito dai sistemi invariabili $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i, \ldots \alpha_n$.

Questo diagramma ha ordinate nulle sulle rette di direzione l

(*) In altre parole i due diagrammi devono essere *affini* con asse d'affinità una retta di direzione l e centro di affinità all'infinito su l.

passanti pei punti $(\pi \alpha_i)$, centri d'istantanea rotazione pei moti dei sistemi α_i rispetto al piano π fisso. Di più siccome il punto $(\alpha_i \alpha_r)$, centro d'istantanea rotazione pel moto relativo di due qualunque, α_i ed α_r, dei sistemi mobili, non cessa di appartenere ad ambo questi sistemi durante il moto elementare considerato, le rette λ_i e λ_r devono intercettare a partire dalla fondamentale λ_π segmenti eguali sulla retta di direzione l passante pel punto $(\alpha_i \alpha_r)$; vale a dire su questa retta devono intersecarsi le rette λ_i e λ_r del diagramma.

8. Se osservasi che con λ_π può considerarsi coincidente la retta λ'_π, diagramma delle velocità dei punti del piano fisso π, questa seconda relazione, che lega la posizione del punto d'incontro di due delle rette $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_i, \ldots \lambda'_n$ qualunque con quella del centro d'istantanea rotazione pel moto relativo dei sistemi piani corrispondenti, comprende come caso speciale l'altra relazione enunciata circa la posizione dei punti d'incontro delle rette $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_i, \ldots \lambda_n'$ con la fondamentale λ_π. V'ha di più: in virtù di quanto si disse a num. 6, il complesso delle rette $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda_i', \ldots \lambda'_n$ e λ_π funziona ancora da diagramma delle velocità in direzione l pei sistemi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i \ldots \alpha_n$ e π rispetto ad uno qualunque di tali sistemi, purchè si assuma a fondamentale la retta λ'_i corrispondente a quello α_i dei sistemi che considerasi fisso. Per la qual cosa al complesso delle rette λ'_1, $\lambda'_2, \ldots \lambda'_i, \ldots \lambda'_n$ e λ_π può darsi il nome di *diagramma delle simultanee velocità in direzione l dei punti dei sistemi piani* α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_i, \ldots \alpha_n$ e π *pei moti elementari di questi sistemi per rispetto ad uno qualunque di essi*, considerato immobile.

9. Consideriamo ora un complesso di tali sistemi piani: α_i, $\alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{r-1}, \alpha_r$. Il moto elementare del sistema α_r relativo al sistema α_i può considerarsi composto dei moti elementari di ciascuno di tali sistemi relativamente al precedente. S'immagini disegnato il diagramma $\lambda_i', \lambda'_{i+1}, \ldots \lambda'_{r-1}$ e λ_r' delle velocità in direzione l dei punti di tali sistemi pei moti relativi di questi per rispetto ad uno qualunque di essi. Le rette $\lambda_i', \lambda'_{i+1}, \ldots \lambda'_{r-1}$ e λ_r' costituiscono una poligonale, di cui i punti d'incontro dei lati successivi λ_i' e λ'_{i+1}, λ'_{i+1} e $\lambda'_{i+2}, \ldots \lambda'_{r-1}$ e λ_r stanno sulle rette p_i in direzione l condotte pei centri $(\alpha_i \alpha_{i+1})$, $(\alpha_{i+1} \alpha_{i+2}), \ldots (\alpha_{r-1} \alpha_r)$ d'istantanea rotazione pei moti relativi dei sistemi considerati a

due a due successivamente. Di più se a destra ed a distanza 1 da ciascuno, $(\lambda_s \lambda_{s+1})$, di tali punti d'incontro dei lati successivi della poligonale e nella direzione l si misura la ordinata intercetta fra le rette λ_s' e λ'_{s+1} intersecantisi in quel punto, ciascuna di queste ordinate è la velocità angolare $\omega_s \omega_{s+1}$ pel moto relativo dei sistemi α_s ed α_{s+1}. Condotte da un polo P le parallele $\mu_i, \mu_{i+1}, \ldots \mu_{r-1}$ e μ_r alle rette $\lambda_i', \lambda'_{i+1}, \ldots \lambda'_{r-1}$ e λ_r', e secate queste parallele mediante una retta di direzione l distante di 1 da P, il segmento $\omega_s' \omega'_{s+1}$ intercetto fra due rette μ_s e μ_{s+1} successive è eguale al segmento $\omega_s \omega_{s+1}$; per la qualcosa la poligonale $\lambda_i' \lambda_{i+1} \ldots \lambda'_{r-1} \lambda_r'$ può dirsi un *poligono funicolare* collegante le velocità angolari $\omega_s \omega_{s+1}$ condotte in direzione l pei centri $(\alpha_s \alpha_{s+1})$ d'istantanea rotazione dei moti componenti; esso infatti si costruisce da tali velocità siccome si costruisce un poligono funicolare collegante un sistema di forze parallele proporzionali a tali velocità ed agenti secondo le rette p_l considerate.

Il centro d'istantanea rotazione pel moto composto, cioè pel moto del sistema α_r rispetto all'α_i, dovendo essere un punto del sistema α_r che ha velocità nulla rispetto al sistema α_i, deve trovarsi sulla parallela r_l ad l pel punto d'incontro dei lati estremi $\lambda_i' \lambda_r'$ del poligono funicolare.

Se quindi, condotte le velocità angolari $\omega_s \omega_{s+1}$ dei moti componenti pei centri $(\alpha_s \alpha_{s+1})$ in altra direzione m sul piano π, si collegano con un altro poligono funicolare, se cioè si costruisce il diagramma delle velocità pei moti elementari dei sistemi α_i, $\alpha_{i+1}, \ldots \alpha_r$, velocità misurate in direzione m diversa da l, si ottiene un'altra retta r_m analoga alla r_l (condotta in direzione m pel punto comune ai lati estremi del nuovo poligono funicolare) che deve passare pel centro O d'istantanea rotazione pel moto composto, centro che viene in tal modo ad essere determinato. Condotta per O la normale al piano π, si ha l'asse della rotazione risultante; la velocità angolare $\omega_i \omega_r$ di tal rotazione è, come risulta dalla figura, eguale alla somma algebrica delle velocità angolari $\omega_s \omega_{s+1}$ pei moti componenti.

10. Resta così trovata in via puramente cinematica la costruzione che a num. 2 avevamo esposta per analogia con quella che vale per la composizione di forze parallele. Termineremo la presente Nota dimostrando ancora in via cinematica teoremi fondamentali relativi ai poligoni funicolari, che si sogliono in Statica dimostrare per via geometrica e per via meccanica.

11. Se per costruire il diagramma delle velocità in direzione l pel complesso dei sistemi invariabili $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{r-1}, \alpha_r$ come poligono funicolare collegante le velocità angolari pei moti relativi di tali sistemi a due a due, si assume un altro polo P_1 sulla parallela ad l per il primo polo assunto P, si ottiene un altro poligono $\lambda_i'' \lambda''_{i+1} \ldots \lambda''_{r-1} \lambda_r''$ tale che due lati successivi $\lambda_s'' \lambda''_{s+1}$ hanno direzioni diverse da quelle dei corrispondenti lati $\lambda_s', \lambda'_{s+1}$ del primo poligono; ma queste due coppie di rette intercettano eguali segmenti sopra ogni retta avente direzione l; quindi il nuovo poligono funicolare, per quanto si disse al num. 6, è ancora diagramma della velocità in direzione l pel sistema considerato e serve per conseguenza ancora alla composizione delle rotazioni elementari $\omega_s \omega_{s+1}$; in altre parole: *il polo* del poligono funicolare *può* senz'inconveniente *spostarsi in direzione l.*

12. Se ora osservasi che la scala delle lunghezze (in cui va misurata la distanza polare δ del poligono funicolare, è indipendente da quella delle velocità, potendosi questa variare senza variare quell'altra solo coll'assumere una diversa unità di tempo, deducesi che *il polo* P *può* pure *spostarsi in direzione normale ad l*.

Laonde *il polo* P *può spostarsi comunque sul piano* π.

13. S'immaginino due diagrammi delle velocità in direzione l, riferentisi ad uno stesso movimento elementare dei medesimi sistemi α, ma costrutti con diversi poli P e P_1. Perchè il centro $(\alpha_i \alpha_r)$ d'istantanea rotazione pel moto relativo di due dei sistemi considerati, α_i ed α_r, è indipendente dalla scelta dei poli, sulla retta di direzione l condotta pel punto $(\alpha_i \alpha_r)$ devono incontrarsi i lati λ_i', λ_r' del poligono funicolare relativo al polo P ed i lati λ_i'', λ_r'' del poligono funicolare relativo al polo P_1, onde può enunciarsi: *Variando i poli, variano i corrispondenti poligoni funicolari, per modo che il punto d'incontro di due lati corrispondenti a due determinati*, ma del resto qualunque, *sistemi* α_i *ed* α_r *percorre una retta di direzione l.*

14. Sieno $\lambda_1' \lambda_2' \ldots \lambda'_{r-1} \lambda_r'$ e $\lambda_1'' \lambda_2'' \ldots \lambda''_{r-1} \lambda_r''$ due poligoni funicolari relativi alle stesse velocità angolari $\overline{\omega_1 \omega_2}, \overline{\omega_2 \omega_3}, \ldots \overline{\omega_{r-1} \omega_r}$, costrutti con due diversi poli P' e P''. Prolunghisi la retta congiungente P' con P'' fino ad incontrare nel punto ω_0 la retta delle velocità $\overline{\omega_1 \omega_2}, \overline{\omega_2 \omega_3}, \ldots, \overline{\omega_{r-1} \omega_r}$, e pel punto $\lambda_1' \lambda_1''$ d'incontro

